Intégration complexe

Définition. La représentation paramétrique d'une courbe ou chemin C dans le plan complexe est donnée par :

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b.$$

La courbe (ou chemin) C est continue si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de $[a,b] \to R$ sont continues .

La courbe (chemin) C est de classe C^1 (lisse) si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de $[a,b] \to R$ sont de classe C^1 , c-à-d les dérivées $x'(t), y'(t)$ sont continues.

Une courbe peut être représentée dans R^2 par l'équation paramétique :

$$(x(t), y(t)), \ a \leq t \leq b.$$

Si la courbe C est lisse, le vecteur $(x'(t), y'(t))$ est le vecteur tangent à la courbe au point $(x(t), y(t))$.

Exemple.1) La courbe représentée par le graphe $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ a pour représentation paramétrique:

$$(t, f(t)), a \leq t \leq b .$$

Si C est lisse, le vecteur tangent est donné par: $(1, f'(t))$.

Par exemple : le chemin $y = x^2$, $t \in [0,2]$ a pour vecteur tangent $(1,2t)$.

Illustration

Exemple.2) Le cercle trigonométrique C d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est représenté par : l'équation parmétrique $(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
Le vecteur tangent est donnée par : $(-\sin(t), \cos(t))$.

Illustration

Dans C, le cercle est représenté par : $z(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs.

Introduction

On considère un champ de vecteurs $F(x,y) = (M(x,y),N(x,y)) = M(x,y)i + N(x,y)j$ où $i = (1,0)$, $j = (0,1)$ est la base canonique de R^2, $M(x,y)$ et $N(x,y)$ sont deux fonctions numériques continues dans une boule ouverte.

Le travail w associé à un déplacement d'un point A à un point B d'une force constante F est déterminé par: $w = \langle F, \overrightarrow{AB} \rangle$, le porduit scalaire de la force F par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Soit maintenant C une courbe déterminée par une représentation paramétrique:

$$r(t) = (x(t),y(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Si C est une courbe lisse, par exemple les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de classe C^1, et $F(x,y) = (M(x,y),N(x,y))$ une force variable.
On voudrait calculer le travail de la force F associé à un déplacement le long de la courbe C du point $A = (x(a),y(a))$ au point $B = (x(b),y(b))$.

Le long de cette courbe, la force F est déterminée par le champ de vecteurs :

$$F(x(t),y(t)) = M(x(t),y(t))i + N(x(t),y(t))j, \quad a \leq t \leq b.$$

On considère alors une partition (subdivision) de l'intervalle [a,b], $a = t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_n = b$.
Soient $P_{i-1}(x(t_{i-1}),y(t_{i-1}))$ et $P_i(x(t_i),y(t_i))$ deux points de la courbe C, et le vecteur

$$\overrightarrow{P_{i-1}(x(t_{i-1}),y(t_{i-1}))P_i(x(t_i),y(t_i))} = (x(t_i) - x(t_{i-1}))i + (y(t_i) - y(t_{i-1}))j \quad (1).$$

Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ sont de classe C^1, donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe deux nombres c_i, d_i dans $]a,b[$ tels que:

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \text{ et } y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(d_i)(t_i - t_{i-1}).$$

En remplaçant dans (1), on obtient alors :

$$\overrightarrow{P_{i-1}(x(t_{i-1}),y(t_{i-1}))P_i(x(t_i),y(t_i))} = (x'(c_i)i + y'(d_i)j)(t_i - t_{i-1}).$$

Pour chaque $i = 1,\ldots,n$, on considère alors le vecteur constant:

$$F_i = M(x(c_i),y(c_i))i + N(x(d_i),y(d_i))j;$$

comme une approximation de la force $F(x(t),y(t))$ le long de la courbe C du point P_{i-1} au point P_i. On obtient alors une approximation du travail de la force $F(x(t),y(t))$ le long de la courbe C du point P_{i-1} au point P_i, par la formule:

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= \langle M(x(c_i),y(c_i))i + N(x(d_i),y(d_i))j, (x'(c_i)i + y'(d_i)j)(t_i - t_{i-1})\rangle \\ &= M(x(c_i),y(c_i))x'(c_i)(t_i - t_{i-1}) + N(x(d_i),y(d_i))y'(d_i)(t_i - t_{i-1}).\end{aligned}$$

Par conséquent la somme :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M(x(c_i),y(c_i))x'(c_i)(t_i - t_{i-1}) + N(x(d_i),y(d_i))y'(d_i)(t_i - t_{i-1}),$$

est une approximation du travail de la force F associé à un déplacement le long de la courbe C du point $A = (x(a),y(a))$ au point $B = (x(b),y(b))$.

On remarque alors que la somme S_n est une somme de Riemann de la fonction intégrable :

$$h(t) = \langle F(x(t),y(t)), r'(t)\rangle = M(x(t),y(t))x'(t) + N(x(t),y(t))y'(t).$$

Quand $n \to \infty$; on obtient l'expression:

$$W = \int_a^b h(t)dt = \int_a^b (M(x(t),y(t))x'(t) + N(x(t),y(t))y'(t))dt.$$

On définit alors l'intégrale curviligne de la composante tangentielle:

Définition . Soit C une courbe définie par l'équation paramétrique: $r(t) = (x(t),y(t)),\ a \leq t \leq b$, les fonctions dérivées $x'(t), y'(t)$ sont continues.
On définit l'intégrale curviligne de la composante tangentielle $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ d'un champ de vecteurs $F(x,y)$ continu le long de la courbe C par l'expression:

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_a^b (M(x(t),y(t))x'(t) + N(x(t),y(t))y'(t))dt$$
$$= \int_a^b \langle F(r(t), r'(t)\rangle dt.$$

$\langle F(r(t), r'(t)\rangle$ ou $F(r(t).r'(t)$ désignent le produit scalaire usuel dans R^2.
Cette intégrale est aussi notée $\int_C F.dr$.

Exemple . Un objet se déplace le long de la parabole (t,t^2) du point $A(-1,1)$ au point $B(2,4)$.

Déterminer le travail total de la force $F(x,y) = (x^2+y^2)i + 3x^2yj$, le long de la courbe C.

L'équation paramétrique de la courbe est donnée par $r(t) = (t,t^2)$. Au point A, on a $t = -1, t^2 = 1$, et au point B, on a $t = 2,\ t^2 = 4$, donc $-1 \leq t \leq 2$.
On obtient alors:

$$W = \int_{-1}^2 \langle F(t,t^2), (x'(t),y'(t)\rangle dt = \int_{-1}^2 ((t^2+t^4)(1) + (3t^2t^2)(2t))dt$$
$$= \int_{-1}^2 (t^2+t^4+6t^5)dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^6\right]_{-1}^2 = \frac{363}{5}.$$

Considérons maintenant un champ de vecteurs dans R^3:

$$F(x,y,z) = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + R(x,y,z)k$$

où $i = (1,0,0), j = (0,1,0)$ et $k = (0,0,1)$ est la base canonique de R^3.

Les fonctions $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ sont des fonctions numériques continnues dans une boule ouverte de R^3. La courbe C est déterminée par l'équation paramétrique:

$$r(t) = (x(t),y(t),z(t)), a \leq t \leq b,$$

les fonctions $x(t), y(t)$, et $z(t)$ sont des fonctions de classe C^1.

Alors, on définit de la même façon, l'intégrale cuviligne de la composante tangentielle $M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ du champ continu de vecteurs

$F(x,y,z)$ le long de la courbe C par :

$$\int_C M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_a^b \langle F(r(t), r'(t)\rangle dt$$
$$= \int_a^b (M(x(t),y(t),z(t))x'(t) + N(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$$

$\langle F(r(t), r'(t)\rangle$ ou $F(r(t).r'(t)$ désigne le produit scalaire usuel dans R^3.

Exemple. Si on considère la courbe C: $r(t) = (t,\ t^2,\ t^3),\quad 0 \le t \le 1,$
et le champ de vecteurs $F(x,y,z) = (e^x, xe^z, x\sin(\pi y^2))$ alors l'intégrale curviligne :

$$\int_C M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_0^1 (e^t + te^{t^3}(2t) + t\sin(\pi t^4)(3t^2))dt$$
$$= \left[e^t + \frac{2}{3}e^{t^3} - \frac{3}{4\pi}\cos(\pi t^4) \right]_0^1$$
$$= \frac{5}{3}e - \frac{5}{3} + \frac{3}{2\pi}.$$

Proposition Si la courbe est définie par des morceaux d'arcs lisses $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ alors :

$$\int_C F.dr = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} F.dr.$$

Exemple Calculer l'intégrale curviligne : $\int_C 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy$
le long de la courbe C définie par: le segment C_1 qui relie les points $(-3,-2)$ et $(1,0)$ et l'arc C_2 du premier quadrant du cercle $x^2 + y^2 = 1$ orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

L'équation de la droite qui passe par les points $(-3,-2)$ et $(1,0)$ est donnée par $x = 1 + 2y$, donc on peut représenter le segment C_1 par : $r(t) = (1 + 2t, t)$, $-2 \le t \le 0$.
La courbe C_2 est représentée par: $x = \cos(t)\quad y = \sin(t)\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Illustration

Calculons l'intégrale curviligne le long du segment C_1.

$$\int_{C_1} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy = \int_{-2}^0 (4(1+2t)(t)(2) + (2(1+t)^2 - 3(1+2t)(t)(1))dt$$
$$= \int_{-2}^0 (18t^2 + 13t + 2)dt = 26.$$

Calculons l'intégrale curviligne le long de l'arc C_2.

$$\int_{C_2} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4(\cos(t))\sin(t)(-\sin(t)) + (2(\cos^2(t) - 3(\cos(t)\sin(t)(\cos(t)))dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-4(\cos(t))\sin^2(t) + 2\cos^3(t) - 3\cos^2(t)\sin(t))dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-4(\cos(t))\sin^2(t) + 2\cos(t)(1 - \sin^2(t)) - 3\cos^2(t)\sin(t))dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos(t) - 6(\cos(t))\sin^2(t) - 3\cos^2(t)\sin(t))dt = -1.$$

D'après la proposition, on a:

$$\int_C 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy =$$
$$\int_{C_1} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy + \int_{C_2} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy = 26 - 1 = 25.$$

4

Indépendance d'une intégrale curviligne par rapport au chemin.

Théorème. Soit F un champ de vecteur qui dérive d'un potentiel $f\, R^2 \to R$, $\nabla f = F$ dans une boule ouverte U.
Alors la valeur de l'integrale curviligne $\int_C F.dr$ est la même pour toutes les courbes lisses C dans U reliant deux points A et B:

$$\int_C F.dr = f(B) - f(A).$$

Remarque : Si F est un un champ de vecteur qui dérive d'un potentiel f alors :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = F(x,y) = (M(x,y), N(x,y)).$$

Si $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ de classe C^1, alors F dérive d'un potentiel f si :

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Donc un un champ de vecteur $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ de classe C^1 dérive d'un potentiel f si :

$$\boxed{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}.}$$

Esquisse de la démontration dans R^2 :

Soient $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ un champ de vecteur et $f(x,y)$ un champ scalaire tel que: $\nabla f(x,y) = F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$.

Soit C est une courbe lisse qui relie le point $A = (x(a), y(a))$ au point $B = (x(b), y(b))$ déterminée par la paramétrisation $r(t) = (x(t), y(t)$

Si on considère la fonction $g(t) = f(x(t), y(t)$, en utilisant la règle de chaîne (composition), on obtient:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = M(x,y)\frac{dx}{dt} + N(x,y)\frac{dy}{dt} = g'(t)$$

et donc,

$$df(x(t), y(t)) = \left(M(x,y)\frac{dx}{dt} + N(x,y)\frac{dy}{dt} \right) dt = g'(t)dt$$

$$df(x(t), y(t)) = M(x,y)dx + N(x,y)dy = dg = g'(t)dt.$$

Par conséquent: $$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a)$$

$$= f(x(b), y(b) - f(x(a), y(a)$$

$$= f(B) - f(A).$$

Exemple . Calculer $\int_C (y^2 + 2x + 4)dx + (2xy + 4y - 5)dy$,
où C est une courbe lisse reliant les deux points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Le champ de vecteurs $(y^2 + 2x + 4)i + (2xy + 4y - 5)j$ dérive du potentiel

$$f(x,y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y \text{ (à vérifier).}$$

Donc, $\int_C (y^2 + 2x + 4)dx + (2xy + 4y - 5)dy = f(1,1) - f(0,0) = 8 - 5 = 3.$

Vérifier ce résultat en utilisant la courbe $y = x$.

Exemple . Calculer $\int_C (e^{-y} - 2x)dx - (xe^{-y} + \sin(y))dy$, *où* C est une courbe lisse déterminée par: $r(t) = \pi\cos(t)i + \pi\sin(t)j,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

La courbe C relie les deux points $r(0) = (\pi, 0)$ et $r(\frac{\pi}{2}) = (0, \pi)$, le champ de vecteurs $(e^{-y} - 2x)i - (xe^{-y} + \sin(y))j$ dérive du potentiel :

$$f(x,y) = xe^{-y} - x^2 + \cos(y) \text{ (à vérifier).}$$

Donc:

$$\int_C (e^{-y} - 2x)dx - (xe^{-y} + \sin(y))dy = f(0,\pi) - f(\pi,0)$$
$$= \cos(\pi) - (\pi - \pi^2 + 1) = \pi^2 - \pi - 2.$$

Exemple . Calculer

$$\int_C (e^x\sin(z) + 2yz)dx + (\ 2xy + 2y)dy + (e^x\cos(z) + 2xy + 3z^2)dz,$$

où C est une courbe lisse reliant les points $(0,0,0)$ au point $(1,-2,\pi)$.

Le champ de vecteurs le champ de vecteur:

$$(e^x\sin(z) + 2yz)i + (\ 2xy + 2y)j + (e^x\cos(z) + 2xy + 3z^2)k$$

dérive du potentiel $f(x,y,z) = e^x\sin(z) + 2yzx + y^2 + z^3 + c$. (à vérifier).

Donc, $\int_C (e^x\sin(z) + 2yz)dx + (\ 2xy + 2y)dy + (e^x\cos(z) + 2xy + 3z^2)dz$

$$= f(1,-2,\pi) - f0,0,0) = \pi^3 - 4\pi + 4.$$

Exemple . Soit $F(x,y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - \sin(y))$, déterminer $f(x,y)$ tel que :

$$(1)\quad \nabla f(x,y) = F(x,y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - \sin(y)).$$

On a $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -e^{-y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, *donc* F dérive d'un potentiel f.

L'égalité (1) implique: (2) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = e^{-y} - 2x$

et (3) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -xe^{-y} - \sin(y)$.

En intégrant l'équation (1), on obtient:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (e^{-y} - 2x)dx = xe^{-y} - x^2 + h(y);$$

h est une fonction qui ne depend que de la variable y. En dérivant par rapport à y, on obtient:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -xe^{-y} + h'(y) = -xe^{-y} - \sin(y) \Rightarrow \qquad h'(y) = -\sin(y)$$

$\Rightarrow h(y) = \cos(y) + c.$

Par conséquent: $f(x,y) = xe^{-y} - x^2 + \cos(y) + c$.

Considérons maintenant trois fonctions M, N, et R de trois variables telles que :

$$grad(f) = \nabla f(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Donc, on a :

$$(1)\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = M(x,y,z),\ (2)\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = N(x,y,z), (3)\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z).$$

Si la fonction f est de classe C^2, de (1), (2) et (3) , on a :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial x} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial N}{\partial z}.$$

Par conséquen $F(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), R(x,y,z))$ dérive d'un potentiel f si :

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}},$$

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}},$$

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}.}$$

Exemple . Soit $F(x,y,z) = (e^x \sin(z) + 2yz,\ 2xz + 2y, e^x \cos(z) + 2xy + 3z^2)$,

déterminer $f(x,y,z)$ tel que :

$$(1)\ \nabla f(x,y,z) = F(x,y,z).$$

L'égalité (1) implique:

$$(2)\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = M(x,y,z),\ (3)\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = N(x,y,z), (4)\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z).$$

En intégrant l'équation (2), on obtient :

$$f(x,y,z) = \int M(x,y)dx = e^x \sin(z) + 2yzx + h(y,z);$$

h est une fonction qui ne depend que des variables y et z. En dérivant par rapport à y, on obtient:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = e^x \sin(z) + \frac{\partial h(y,z)}{\partial y} = 2xz + 2y \Rightarrow \quad \frac{\partial h(y,z)}{\partial y} = 2y$$

$\Rightarrow h(y,z) = y^2 + g(z)$. En dérivant par rapport à z, on obtient:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^x\cos(z) + 2xy + g'(z) = e^x\cos(z) + 2xy + 3z^2$$

$\Rightarrow \quad g'(z) = 3z^2$ et donc $g(z) = z^3 + c$.

Par conséquent: $f(x,y,z) = e^x\sin(z) + 2yzx + y^2 + z^3 + c$.

Intégrale curviligne complexe.

Définition. Soit C une courbe (chemin) dans le plan complexe C, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction complexe. L'intégrale curviligne de f sur C, est notée : $\int_C f(z)dz$.

Si la représentation paramétrique d'une courbe ou chemin C dans le plan complexe est donnée par :

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b.$$
$$dz = dx + idy.$$

Donc,

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy);$$

$$\int_C (u(x,y)dx - v(x,y)dy + i(v(x,y)dx + u(x,y)dy);$$

$$\int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C (v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

$\int_C (u(x,y)dx - v(x,y)dy; \int_C (v(x,y)dx + u(x,y)dy)$
des intégrales curvilignes dans R^2.
On obtient alors :

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C (v(x,y)dx + u(x,y)dy.}$$

Si la fonction complexe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe alors les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées
:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad (1)$$
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \quad (2).$$

Par conséquent les champs de vecteurs $(u(x,y), -v(x,y)), (v(x,y), u(x,y))$ découlent d'un potentiel; on obtient le théorème suivant :

Théorème1 : Si la fonction $f(z)$ est une fonction holomorphe sur un domaine connexe D. Alors, pour tout chemin lisse C joignant deux points z_1, z_2, on a :

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)},$$

la fonction complexe $F(z)$ est holomorphe telle que $F'(z) = f(z)$.

Remarques:

1) Ce théorème généralise le théorème fondamental de calcul :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),\ F'(x) = f(x),$$

le domaine est un intervalle $[a,b]$.

2) Dans le cas omplexe, le domaine est connexe, c'est à dire, on ne peut l'écrire comme réunion de deux ouverts disjoints.

Exemples:

1) $\int_0^{1+i} z^2 dz = [\frac{z^3}{3}]_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^2 = -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}.$

2) $\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos(z)dz = [\sin(z)]_{-\pi i}^{\pi i} = 2\sin(i\pi) = 2i\sinh(\pi).$

3) $\int_{8+\pi i}^{8-3\pi i} e^{\frac{z}{2}} dz = [2e^{\frac{z}{2}}]_{8+\pi i}^{8+3\pi i} = 2(e^{4-\frac{3\pi i}{2}} - e^{4+\frac{\pi i}{2}}) = 0$ (pourquoi?).

Théorème2: Soit C une courbe lisse d'équation paramétrique :

$$z(t) = x(t) + iy(t),\quad a \le t \le b.$$

Si la fonction $f(z)$ est une fonction continue sur C. Alors :

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z(t))z'(t)dt &= \int_C (u(x,y) + iv(x,y))(x'(t) + iy'(t))dt \\ &= \int_C (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy) \\ &= \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C (v(x,y)dx + u(x,y)dy \\ &= \int_C f(z)dz.\end{aligned}$$

Remarque:

Si la fonction $f(z)$ n'est pas holpmorphe , on utilise le théorème (2).

Exemples: 1) Calculer $\int_C \frac{dz}{z}$, C : le cercle trigonométrique $x^2 + y^2 = 1$.

$C : z(t) = \cos(t) + i\sin(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi,\ z'(t) = -\sin(t) + i\cos(t) = ie^{it}$

$f(z) = \frac{1}{z(t)} = e^{-it},$

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} e^{-it}ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = i2\pi.$$

2) Calculer $\int_C \mathrm{Re}(z)dz,\ C : C_1 \cup C_2,$

C_1 :Le segment reliant les points 0 et 1,

C_2 : Le segment reliant les points 1et $1 + 2i$.

La représenation paramétrique de C_1 :

$$z(t) = t,\ z'(t) = 1, \mathrm{Re}(z) = x(t) = t,\ 0 \le t \le 1.$$

La représenation paramétrique de C_2 :

$$z(t) = 1 + it,\ z'(t) = i, \mathrm{Re}(z) = x(t) = 1,\ 0 \le t \le 2.$$

$$\int_C \mathrm{Re}(z)dz = \int_{C_1} \mathrm{Re}(z)dz + \int_{C_2} \mathrm{Re}(z)dz;$$

$$\int_0^1 tdt + \int_0^2 idt = \frac{1}{2} + i2.$$

Exercice:

Démontrer que $\int_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } m = -1 \\ 0, & \text{si } m \ne -1,\ m \in Z. \end{cases}$

C : cercle de centre z_0 et de rayon r.

Définitions :

C est un chemin reliant deux points A et B est fermé si $A = B$.
C est chemin simple s'il ne contient pas de points doubles,triples,etc...

Si C est fermé, on note $\oint_C f(z)dz$.

Illustrations.

Théorème d'intégrale de Cauchy:

Si la fonction $f(z)$ est holorphe sur un domaine simplement connexe D,
C est une courbe simple fermée dans D. Alors :

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Exemples :1)

$$\oint_C \cos(z)dz = 0,$$

$$\oint_C e^z dz = 0,$$

$$\oint_C z^n dz = 0;\ n = 1,2,\ldots.$$

C n'importe quel chemin simple fermé dans un domaine connexe.
2) Si C est le cerle trigonométrique, C est une courbe simple fermée,

$$\oint_C \overline{z}\,dz = \int_0^{2\pi} i dt = i2\pi;$$

car la fonction $f(z) = \overline{z}$ n'est pas holomorphe en 0 contenu dans le disque D.

Remarque. L'intégrale $\oint_C f(z)dz$ peut être égale à 0, même si la fonction n'est pas holomorphe sue D.

Exemple: $\oint_C \frac{1}{z^2}dz = 0$, C un cercle de centre 0. La fonction $\frac{1}{z^2}$ n'est pas holomorphe sur le disque D de centre 0.

Indépendance du chemin.

Théorème. Soient z_1 et z_2 dans le plan cómplexe C.
Si $f(z)$ est holomorphe sur un domaine D simplement connexe, alors l'intégrale ne dépend pas du chemin simple rejoignant z_1 à z_2.
Si C_1 :chemin simple rejoignant z_1 à z_2, C_2chemin rejoignant z_1 à z_2 :

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

Démontration: C_1 :chemin simple rejoignant z_1 à z_2

$-C_2$:chemin inverse de C_2 simple rejoignant z_2 à z_1. On a :

$$\int_{C_2} f(z)dz = -\int_{-C_2} f(z)dz$$

Si C_1 et C_2 ont seulement z_1 et z_2 en commun, alors $C_1 \cup -C_2$ est une courbe simple fermée, d'après le théorème, on a :

$$\int_{C_1 \cup -C_2} f(z)dz = 0$$

$$\int_{C_2} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = 0$$

$$\int_{C_1} f(z)dz = -\int_{-C_2} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

Si C_1 et C_2 ont plusieurs points d'intersetion commun , on peut utiliser des subdivisions.

Illustrations, Exercices et commentaires.

1) Calculer $\int_C e^{2z}dz$; C le segment joignant les points πi à $2\pi i$.

2) Calculer $\oint_C (z + \frac{1}{z})dz$; C le cercle unité orienté positivement.

3) Calculer $\int_C \frac{1}{\cos^2(z)}dz$; C le segment joignant les points $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}i$.

4) Calculer $\int_C ze^{\frac{z^2}{2}}dz$; C le segment joignant les points i à 1.

Théorème (Formule de Cauchy):

Soit une fonction holomorphe $f(z)$ sur un domaine simplement connexe D, pour tout z_0 dans D et toute courbe fermée entourant z_0 alors :

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0)}.$$

La courbe C est orientée positivement (dans ce cas le sens contraire d'une montre).

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz}.$$

Esquisse de la démonstration:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz = f(z_0)\oint_C \frac{dz}{z - z_0} + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz.$$

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2i\pi, \quad \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz = 0.$$

Exemples:

1) $\oint_C \frac{e^z dz}{z - 2} = 2\pi i e^2$, C n'importe quelle courbe fermée entourant $z = 2$.

2) $\oint_C \frac{z^3 - 6dz}{2z - i} = \oint_C \frac{\frac{1}{2}(z^3 - 6)dz}{z - \frac{i}{2}} = \left[\frac{1}{2}(z^3 - 6)\right]_{z=\frac{i}{2}} = \frac{\pi}{8} - 6\pi i$,

C n'importe quelle courbe fermée entourant $z = \frac{i}{2}$, orientée positivement.

3) Calculer $\oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}dz$ sur C : $|z - 1| = \frac{1}{2}$ orientée positivement.

On a : $\oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}dz = \oint_C \frac{z^2 + 1}{(z - 1)(z + 1)}dz = \oint_C \frac{\frac{z^2 + 1}{(z + 1)}}{(z - 1)}dz.$

-1 n'appartient pas à D; donc la fonction $\frac{z^2 + 1}{(z + 1)}$ est homorphe sur D,

De plus C entoure 1, et on a :

$$\oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}dz = \left[\frac{z^2 + 1}{(z + 1)}\right]_{z=1} 2\pi i = 2\pi i.$$

Exercices :

1) Calculer $\oint_C \frac{z^2-4}{z^2+4}dz$; $|z-1| = 2$ orientée positivement.

2) Calculer $\oint_C \frac{e^{3z}}{3z-i}dz$; $|z| = 1$ orientée positivement.

3) Calculer $\oint_C \frac{dz}{z^2-1}$; $|z+1| = 1$ orientée positivement.

4) Calculer $\oint_C \frac{\ln(z+1)}{z^2+1}dz$; $|z+2i| = 2$ orientée positivement.

5) Calculer $\oint_C \frac{\sin(z)dz}{z^2-2iz}$; $|z| = 3$ orientée sens contraire de la montre

et $|z| = 1$ orientée même sens de la montre .

Théorème (Formule des dérivées de Cauchy):

Soit une fonction holomorphe $f(z)$ sur un domaine simplement connexe D, ses dérivées d'ordre n sont holomorphes alors :

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz.$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

La courbe C est orientée positivement .

Exemples :

1) $\oint_C \frac{\cos(z)dz}{(z-i\pi)^2} = [2\pi i\cos'(z)]_{z=i\pi} = -2\pi i\sin(\pi i) = 2\pi\sinh(\pi)$,

C n'importe quelle courbe fermée entourant $z = \pi i$. (C orientée positivement).

2) $\oint_C \frac{z^4-3z^2+6}{(z+i)^3}dz = [\pi i(z^4-3z^2+6)'']_{z=i} = [\pi i(12z^2-6)]_{z=i} = -18\pi i.$

C n'importe quelle courbe fermée entourant $z = i$. (C orientée positivement).

3)

$$\oint_C \frac{e^Z}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = \left[2\pi i\left(\frac{e^Z}{(z^2+4)}\right)'\right]_{z=1} = \left[2\pi i\left(\frac{e^Z(z^2+4)-e^z 2z}{(z^2+4)^2}\right)\right]_{z=1} = \frac{6e\pi}{25}i.$$

C n'importe quelle courbe fermée entourant $z = 1, \pm 2i$ à l'extérieur du domaine. (C orientée positivement).

Exercice :

1) Calculer $\oint_C \frac{\sin(4z)}{(z-4)^3}dz$; $C: |z| = 5,\ |z-3| = \frac{3}{2}$ orientée positivement..

EX 5 Serie 2

SERIES NUMERIQUES

Suites réelles (Quelques rappels).

Définitions et exemples.

- Une suite numérique réelle est une application de N dans R qu'on note: $(u_n)_{n\in N}$, $(v_n)_{n\in N}, \ldots$; u_n est appelé le n^{ieme} terme de la suite (u_n).

Exemple : La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est une suite infinie $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots$

- Une suite numérique (u_n) converge vers l si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M,\ \forall n \in N, (n \geq M \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

On note : $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

Exemple : $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+1} = \frac{1}{3}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

- Si une suite (u_n) ne converge pas, on dit que la suite (u_n) est divergente.
- Une suite (u_n) est dite majorée s'il existe $A \in R$ tel que $\forall n \in N, u_n \leq A$: A est appelé un majorant de la suite (u_n).
- Une suite (u_n) est dite minorée s'il existe $B \in R$ tel que $\forall n \in N, u_n \geq B$: B est appelé un minorant de la suite (u_n).
- Une suite numérique (u_n) est dite bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

$$(u_n) \text{ est bornée} \Leftrightarrow \exists A,\ \forall n \in N, |u_n| \leq A.$$

Proposition. Toute suite convergente est bornée.

Exemple: La suite géométrique (r^n) converge si et seulement si $|r| < 1$ ou $r = 1$. Si $|r| < 1$ alors $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Si $r = 1$, la suite est stationnaire.

- Une suite (u_n) est dite croissante si et seulement si $\forall n \in N,\ u_n \leq u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est dite décroissante si et seulement si $\forall n \in N,\ u_{n+} \leq u_n$.
- Une suite (u_n) est dite strictement croissante si et seulement si $\forall n \in N$, $u_n < u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est dite strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in N$, $u_{n+} < u_n$.
- Une suite (u_n) est dite monotone si et seulement si (u_n) est croissante ou (u_n) est décroissante.

Théorème :

Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.
Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Exemple : La suite $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ est croissante et est majorée par 1 la borne supérieure; $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ converge vers 1.
Toute suite réelle croissante non majorée converge vers ∞.
Toute suite réelle décroissante non minorée converge $-\infty$.

Séries numériques réelles.

Définition : Soit (u_n) une suite numérique réelle infinie, la somme infinie :

$$u_0 + u_1 + u_3 + \ldots\ldots$$

est appelée série numérique de terme générale u_n qu'on note : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.
La suite définie par $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n$ est appelée la n^{ième} somme partielle de la série.

Définition : La série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S$ si la suite des sommes partielles (S_n) converge vers S ($\lim_{n\to\infty} S_n = S$). Si la suite S_n est divergente alors la série est dite divergente.

Exemples :1) La série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ est appelée série géométrique, $a \neq 0$.
La série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ est convergente $\Leftrightarrow$ $|r| < 1$ et $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$.
On a $S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n$, si $r = 1$, $S_n = (n+1)a$ diverge.
Si $r \neq 1$,

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n) - (ar + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n+1})$$
$$(1-r)S_n = a - ar^{n+1}$$
$$S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}.$$

Par conséquent, la suite S_n diverge si $|r| \geq 1$ et converge vers $\dfrac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$.
La série $\sum_{n=0}^{\infty} 2(\frac{1}{3})^n$ converge vers $\dfrac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3$.

2)

Si $|x| < 1$ alors la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Si $|x| \geq 1$ alors la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge.

3) La série télescopique $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i(i+1)}$ est convergente vers 1.
On remarque que : $\dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{(i+1)}$, pour tout $i = 1,2,3,\ldots..$

Donc, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{1(2)} + \dfrac{1}{2(3)} + \dfrac{1}{3(4)} + \ldots. + \dfrac{1}{(n-1)(n)} + \dfrac{1}{n(n+1)}$

$$= (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n}$$

Par conséquent, $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1.$$

Théorème: Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ convergent alors $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Pour tout $c \in R$, $\sum_{n=0}^{\infty} cu_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=0}^{\infty} u_n .$$

Théorème: Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

On a $S_n - S_{n-1} = u_n$, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, et donc $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$.

La réciproque est fausse.

Exemple: La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge même si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

En effet, $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

Donc $S_n \geq \sqrt{n} \to \infty$, quand $n \to \infty$, par conséquent $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

La contraposée du théorème est aussi utilisée :

Si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.

Exemple : La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3n^4 + 5n}$ diverge car $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^4}{3n^4 + 5n}) = \frac{1}{3} \neq 0$.

Séries à termes positifs et Tests de convergence.

Définition. Une série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est à termes positifs si $\forall n \in N, u_n \geq 0$.

Proposition : Une série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est à termes positifs est convergente si et seulement si la suite numérique $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ majorée.

$\Rightarrow$)évident.

$\Leftarrow$)La suite S_n est croissante car $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$ et majorée donc converge.

Théorème : (Test d'intégrale).

Soit f une fonction continue, décroissante, positive sur l'intevalle $[1,\infty[$, et $u_n = f(n)$. Alors:

> La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente $\Leftrightarrow$ L'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x)dx$ est convergente.

On peut remplacer l'intervalle $[1,\infty[$ par $[n_0,\infty[$.

Exemple : 1) La série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue, décroissante, positive, de plus $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x\to\infty}[\ln(x) - \ln(1)] = \infty$.

2) Pour $P > 0, p \neq 1$, $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^p} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{t^{1-p}}{1-p}\right]_1^x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$ converge si $1-p < 0$ et diverge si $1-p > 0$.

La fonction $f(x) = \frac{1}{x^p}$ est continue, décroissante, positive, si $p > 0$.

On obtient le résultat suivant :

> La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ et diverge si $0 < p \leq 1$.

Exemple : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge car $0 < \frac{1}{2} \leq 1$.

Théorème : (Test de comparaison).

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$ (à partir d'un certain rang n_0)

Alors:

a) La série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente $\Rightarrow$La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente.

b) La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est divergente $\Rightarrow$La série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est divergente.

Exemple : La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n^2-3}$ est divergente car $\frac{n}{2n^2-3} \geq \frac{1}{2n} \geq 0$,
et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Théorème : (Test de comparaison limite).

Si $0 \leq u_n,\ 0 < v_n,\ \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l;\ \ 0 < l < \infty$.
Alors:

La série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente $\Leftrightarrow$ La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente.

Exemple : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{2n^3-3n^2+10}$,
$\lim_{n\to\infty} \frac{n-5}{2n^3-3n^2+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$,

on ne peut pas conclure, on pose $v_n = \frac{1}{2n^2}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-5}{2n^3-3n^2+10}}{\frac{1}{2n^2}} = 1$.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{2n^3-3n^2+10}$ converge.

Théorème : (Test quotient).

Si $0 \leq u_n$, et $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$.
Alors:

a) Si $\rho < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente

b) Si $\rho > 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est divergente

c) Si $\rho = 1$, on ne peut pas conclure.

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots \quad \text{sur }]-1,1[}.$$

De même, $Arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \ldots \text{sur }]-1,1[$$

On obtient :

$$\boxed{Arc\tan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots\ldots \quad \text{sur }]-1,1[}.$$

Exemple : Le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ est $]-\infty, \infty[$ (*vérifier*).

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $f(0) = 1, f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = f(x)$.

Par conséquent, $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sur $]-\infty, \infty[$.

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots \quad \text{sur }]-\infty, \infty[}$$

$$\boxed{e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} \ldots\ldots \quad \text{sur }]-\infty, \infty[}$$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots\ldots \quad \text{sur }]-\infty, \infty[}$$

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots\ldots \quad \text{sur }]-\infty, \infty[}$$

$$\boxed{\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \ldots\ldots \quad \text{sur }]-\infty, \infty[}$$

$$\boxed{\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \ldots\ldots \quad \text{sur }]-\infty, \infty[}.$$

SERIES NUMERIQUES COMPLEXES

Définition : Soit (z_n) une suite numérique complexes infinie, la somme infinie :

$$z_0 + z_1 + z_3 + \ldots\ldots$$

est appelée série numérique de terme générale z_n qu'on note : $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Définition : La série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est dite convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$ si la suite des sommes partielles (S_n) converge vers S ($\lim_{n\to\infty} S_n = S$). Si la suite S_n est divergente alors la série est dite divergente.

Proposition: Si $z_n = x_n + iy_n$ alors :

La série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$converge $\Leftrightarrow$ La série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et la série $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergent.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est la partie réelle de la série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ est la partie imaginaire de la série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Exemple: La série $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}} + i\frac{1}{n^2})$ diverge car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

La série $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^3} + i\frac{1}{n^2})$ converge car les séries $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^3})$ et $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2})$ convergent,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^3} + i\frac{1}{n^2}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^3}) + i\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}).$$

Théorème: Si $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ convergent alors$\sum_{n=0}^{\infty}(z_n + w_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z_n + w_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

Pour tout $c \in C$, $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} cz_n = c\sum_{n=0}^{\infty} z_n .$$

Théorème: Si une série complexe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$converge alors $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Si $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ alors la série complexe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ diverge.

Définition. Une série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{n=0}^{\infty}|z_n| = |z_0| + |z_1| + |z_2| + |z_3|$ converge; $|z_n|$ est le module de z_n.

Proposition : Si une série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est dite absolument convergente alors elle est convergente.

Théorème : (Test de comparaison).

Si $|z_n| \leq v_n$ pour $n \geq n_0$ (à partir d'un certain rang n_0). Alors:

La série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente $\Rightarrow$La série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est absolumentconvergente.

Exemple : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i}{2n^2}$ est absolument convergente,

car $\left|\frac{1+i}{2n^2}\right| \leq \frac{|1+i|}{2n^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2n^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2n^2}$ converge.
La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2-2i}$ est absolument convergente,
car $\left|\frac{i^n}{n^2-2i}\right| \leq \frac{1}{|n^2-2i|} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4+4}} \leq \frac{1}{n^2}$.

Théorème : (Test quotient).

On considère une série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \rho$.

Alors:

a) Si $\rho < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est absolument convergente

b) Si $\rho > 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est divergente.

c) Si $\rho = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(30+2i)^n}{n!}$ est absolument convergente,

car $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{|30+2i|}{n+1} \to 0$.

Séries entières complexes:

Définition. On appelle série entière en $(z-z_0)$, une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots..$$

$z, z_0, a_0, a_1, \ldots\ldots.,$ z_0 est appelée centre de la série.
La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ est appelée Série de Taylor.
Si $z_0 = 0$, on obtient la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ appelée série de Maclaurin.

Exemple : La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, en utilisant le test quotient,
$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}n!}{n+1!z^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{(n+1)} = 0$,
la série converge abolument sur C.

Théorème (Rayon de convegence):

La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge absolument sur un disque de la forme :

a) $\{z \in C/\ |z-z_0| < R\}$, $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

b) $z = z_0$; si $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 0$.

c) C ; $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty.$

R est appelé le rayon de convergence de la série.

Exemple : On considère la série $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}(z-3i)^n$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!)^2}{(2n+2)(2n+1)}\right| = \frac{1}{4}.$$

Donc,. la série converge absolument sur le disque ouvert de centre 3i et de rayon $\frac{1}{4}$, et donc converge.

On considère la série $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^n}{(1+i)^n}(z-5)^n$. La série converge absolument sur le disque ouvert de centre 5 et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. (*à vérifier*).

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots\ldots$ alors:

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0);\quad f^{(n)}(z) \text{ la dérivée } n^{ième} \text{ de } z.$$

Si on remplace $f^{(n)}(z_0)$ par la formule $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$; on obtient;

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz;$$

C nimporte quelle courbe fermée simple entourant z_0, et $f(z)$ holomorphe sur l'intérieur du contour C.

Exemples :

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\ ,\quad |z| < 1.}$$

$$\boxed{\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4}\ldots\ldots\quad |z| < 1}.$$

$$\boxed{Arc\tan(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^n = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7}\ldots\ldots\quad |z| < 1}.$$

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots\quad \text{sur } C}$$

$$\boxed{\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \ldots\ldots \quad \text{sur } C}$$

$$\boxed{\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \ldots\ldots \quad \text{sur } C}$$

$$\boxed{\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} \ldots\ldots \quad \text{sur } C}$$

$$\boxed{\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} \ldots\ldots \quad \text{sur C}}$$

Si on pose $z = iy$, $y \in R$, on a :

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}.$$

En remarquant que : $(i)^{2k} = (-1)^k$ et $(i)^{2k+1} = (-1)^k i$, on a :

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n (y)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (y)^k}{2k!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (y)^{2+1k}}{2k+1!}.$$

On obtient la formule d'Euler :

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y).$$

Séries de Laurent et résidus

Les séries de Laurent généralisent les séries de Taylor pour développer en séries entières en temes de $z - z_0$ des fonctions $f(z)$ qui présentent des singularités en z_0 .

Exemple: $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z}$ est une fonction non définie en $z_0 = 0$.
La fonction $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\ldots$
Si $z \neq 0$, On a $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-1}}{2n!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2} + \frac{z^3}{4!} - \ldots$
pour tout z tel que $|z| > 0$, la série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-1}}{2n!}$ est appelée la série de Laurent de la fonction $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z}$.

Définition: Si la fonction $f(z)$ n'est pas holomorphe au voisinage de z_0, le point z_0 est appelé point singulier.
S'il existe un disque de centre z_0 privé du point z_0 tel que la fonction est holomorphe, le point z_0 est appelé point singulier isolé.

Définition: Une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

est appelée série de Laurent de centre z_0.
La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ est appelée la partie singulière.

Théorème. Si $f(z)$ est une fonction holomorphe sur un domaine :

$$D = \{z \in C/\ r_1 < |z-z_0| < r_2\}$$

D couronne ouverte ou anneau ouvert. Alors, la fonction $f(z)$ admet un développement unique en série de Laurent de centre z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n};$$

Les coefficients a_n et b_n sont déterminés par :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)(z-z_0)^{n-1}dz.$$

C une courbe fermée entournant z_0 et orientée positivement dans D.

Définition: S'il existe m tel que $b_m \neq 0$ tel que $b_n = 0$ pour toùt $n > m$, z_0 est appelé un pôle d'ordre m.

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)m} + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots. \quad \text{sur D.}$$

Si $m = 1$, z_0 est appelé un pôle simple.
S'il existe les b_m sont infinis, on dit que z_0 est un point singulier essentiel.

Illustration

Remarque : On peut aussi représenter $f(z)$ par :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\ldots$$

Exemples :

1) Déterminer la série de Laurent de centre 0 de la fonction $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^5}$.

$$f(z) = z^{-5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040}z^2 \ldots |z| > 0.$$

2) Déterminer la série de Laurent de centre 0 de la fonction $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$.

On pose $Z = \frac{1}{z}$,

$$f(Z) = \frac{e^Z}{Z^2} = \frac{1}{Z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Z)^{n-2}}{n!} = \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{2} + \frac{Z}{3!} + \frac{Z^2}{4!} + \ldots; z \neq 0.$$

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \ldots; |z| > 0.$$

3) Si $|z| > 1$, donner le développement en séries de Laurent de la fonction $\frac{1}{1-z}$.

On a : $\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}$, et $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$; donc $\frac{1}{(1-\frac{1}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n$.

Donc,

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{n+1} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots ; |z| > 1.$$

4) Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction $\frac{1}{z^3 - z^4}$ de centre 0.

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 \ldots 0 < |z| < 1.$$

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = -\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{n+1} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} - \ldots ; |z| > 1.$$

Définition. Si la fonction $f(z)$ admet un développement en série de Laurent de centre z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n};$$

On a :

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz.$$

C une courbe fermée entournant z_0 et orientée positivement dans D.

Le coefficient b_1 est appelé le résidu de la fonction $f(z)$ au point $z = z_0$, et on $b_1 = \mathrm{Re}\,s_{z=z_0} f(z)$.

Exemples : 1) Intégrer la fonction $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4}$ sur le cercle unité $C : x^2 + y^2 = 1$, orienté positivement(le sens contraire de l'aiguille d'une montre).

$$f(z) = z^{-4}(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!}$$
$$= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \frac{z}{120} - \frac{1}{5040}z^3 \ldots |z| > 0.$$

La fonction $f(z)$ a un pôle d'ordre 3 au point 0, $b_1 = \mathrm{Re}\,s_{z=0} f(z) = -\frac{1}{6}$.

Par conséquent,

$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\sin(z)}{z^4}dz,$$
$$\oint_C \frac{\sin(z)}{z^4}dz = -\frac{\pi i}{3}.$$

2) Intégrer la fonction $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)}$ sur le cercle :

$C : |z| = \frac{1}{2}$, orienté positivement(le sens contraire de l'aiguille d'une montre).

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 \ldots 0 < |z| < 1.$$

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = -\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{n+1} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} - \ldots ; |z| > 1.$$

La fonction $f(z)$ deux points singliers 0, et 1, 1 n'est pas entouré par C, $b_1 = \mathrm{Re}\,s_{z=0} f(z) = 1$.

Par conséquent,

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z^3(1-z)}dz,$$
$$\oint_C \frac{1}{z^3(1-z)}dz = 2\pi i.$$

Calcul des résidus:

Pôles simples :

1)Si la fonction $f(z)$ admet un pôle simple au point z_0 alors:

$$\boxed{\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z).}$$

2)Si la fonction $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ admet un pôle simple au point $z_0, p(z_0) \neq 0$ alors:

$$\boxed{\mathrm{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.}$$

Exemple:

La fonction $f(z) = \dfrac{(9z+i)}{(z^3+z)}$ admet un pôle simple au point $z_0 = i$:

$$\mathrm{Res}_{z=i} \frac{(9z+i)}{(z^3+z)} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{(9z+i)}{(z^3+z)} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{(9z+i)}{z(z+i)(z-i)} = \frac{10i}{-2} = -5i.$$

On peut utiliser la deuxième méthode :

$$\mathrm{Res}_{z=i} \frac{(9z+i)}{(z^3+z)} = \frac{(9z+i)}{(z^3+z)'} = \left[\frac{(9z+i)}{3z^2+1}\right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i.$$

Pôles d'ordre m :

Si la fonction $f(z)$ admet un pôle d'ordre m au point z_0 alors:

$$\boxed{\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)}.}$$

$[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)}$ la dérivée d'ordre m-1 de la fonction $(z-z_0)^m f(z)$.

Exemple:

La fonction $f(z) = \dfrac{50z)}{(z+4)(z-1)^2}$ admet un pôle d'odre 2 au point $z_0 = 1$:

$$\mathrm{Res}_{z=1} \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 1}[(z-1)^2 f(z)]^{(1)}$$

$$\lim_{z\to 1}\left[\frac{50z}{(z+4)}\right]' = 8.$$

Théorème. Si $f(z)$ est une fonction holomorphe sur un domaine D de frontière C fermée (D entouré par C) sauf sur un nombre fini de points $z_1, z_2, z_3, ;;;;, z_k$ dans C. Alors, l'intégrale de la fonction la fonction $f(z)$ sur C orientée positivement dans D.

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z=z_j} f(z).}$$

Exemple: Calculer l'intégrale de la fonction $f(z) = \dfrac{4-3z}{(z^2-z)}$ sur C entourant 0,1;

$$\mathrm{Res}_{z=0} \frac{4-3z}{z(z-1)} = -4, \mathrm{Res}_{z=1} \frac{4-3z}{z(z-1)} = 1 \text{ à vérifier.}$$

Donc,

$$\oint_C \frac{4-3z}{(z^2-z)}dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{2} \mathrm{Res}_{z=z_j} f(z) = 2\pi i(-4+1) = -6\pi i.$$

Indications(Devoir).

Exercice I. 1) *a)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n}$. Le domaine de convergence $]-4,0[$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{\sqrt{n^4+1}}$. Le domaine de convergence $\left[-\frac{2}{3},0\right]$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-\pi)^n}{3^n}$. Le domaine de convergence $]-3+\pi,3+\pi[$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+3i}{5-i}\right)^n (z+\pi i)^n$. Le centre de la série $z=-\pi i$, le rayon $\sqrt{2}$.

2) On peut supposer que $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une solution sur son domaine de convergence.

Donc $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$, par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.$$

$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^4 .. + na_nx^{n-1} + .. = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + .. + a_{n-2}x^{n-1} + ..$

On obtient : $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}a_0; a_3 = \frac{1}{3}a_1; a_4 = \frac{1}{3}a_1 \dots;$
on a : $a_n = \frac{1}{n}a_{n-2}$. Par récurence $a_{2k+1} = 0;\ a_{2k} = \frac{1}{2^K}\frac{1}{k!}a_0$..
Suposons $a_{2k} = \frac{1}{2^K}\frac{1}{k!}a_0,\ a_{2k+2} = \frac{1}{2k+2}a_{2k} = \frac{1}{2(k+1)}\frac{1}{2^K}\frac{1}{k!}a_0$

$$= \frac{1}{2^K 2(k+1)}\frac{1}{k!}a_0 = \frac{1}{2^{K+1}(k+1)!}a_0$$

Donc, $y = a_0\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x^2}{2})^k}{k!} = a_0 e^{\frac{x^2}{2}}$ sur le domaine de convergence R.

De plus, $y(0) = a_0e^0 = a_0 = 1$ et donc $y = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Exercice II.

On développe la fonction $\frac{\sin(t)}{t} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1!}t^{2n+1}}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1!}t^{2n};$

$$\frac{1}{z^3}\int_0^z \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{1}{z^3}\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1!}t^{2n}dt$$
$$= \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)2n+1!}t^{2n+1}\right]_0^z$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2n+1!}z^{2n-2}$$
$$= \frac{1}{z^3}\int_0^z \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!3} + \frac{z^2}{5!5} - ..$$

2) $\frac{\sin(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^3} \quad z_0 = \frac{\pi}{4}$.

On pose $Z = z - \frac{\pi}{4}$, $\sin(z) = \sin(Z+\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})\cos(Z) + \cos(\frac{\pi}{4})\sin(Z)$
En développant, $\cos(Z)$ et $\sin(Z)$ autour de 0;

$$\sin(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!}Z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1!}Z^{2n+1}\right);\ R = \infty.$$

$$\frac{\sin(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^3} = \frac{\sqrt{2}}{2(z-\frac{\pi}{4})^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!}(z-\frac{\pi}{4})^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1!}(z-\frac{\pi}{4})^{2n+1}\right).$$

$$\frac{\sin(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{(z-\frac{\pi}{4})^3} + \frac{1}{(z-\frac{\pi}{4})^2} - \frac{1}{2!(z-\frac{\pi}{4})}\right) - \frac{1}{3!} + \frac{(z-\frac{\pi}{4})}{4!} + \ldots.$$

b) $z^2\sinh(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!z^{2n-1}} = z + \frac{1}{6z} + \frac{1}{120z^3}$; $R = \infty$.

Exercice III.

a) $\oint_C \frac{\cosh(z)}{z^2-3iz}$, $C : |z| = 1$.

$\frac{\cosh(z)}{z^2-3iz} = \frac{\cosh(z)}{z(z-3i)}$, pôle simple au point $z = 0$ entouré par C, pôle simple au point $z = 3i$ non entouré par C.

$$\text{Résidus}_{z=0} = \left[\frac{\cosh(z)}{(z-3i)}\right]_{z=0} = \frac{i}{3}$$

$$\oint_C \frac{\cosh(z)}{z^2-3iz} = 2\pi i\left(\frac{i}{3}\right) = -\frac{2\pi}{3}.$$

b) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos(\theta)}$. on pose $z = e^{i\theta}$. C : le cercle unité $x^2+y^2 = 1$.

on a $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ car $\frac{1}{z} = e^{-i\theta}$, $dz = i\,e^{i\theta}d\theta$

et donc $\frac{dz}{iz} = d\theta$. En utilisant le changement de variables, on obtient :

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos(\theta)} = \oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} = \oint_C \frac{dz}{-\frac{i}{2}(z^2-2\sqrt{2}z+1)}$$

$$= -\frac{2}{i}\oint_C \frac{dz}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)}.$$

Pôle simple au point $z = -1+\sqrt{2}$ entouré par C, car $|-1+\sqrt{2}| < 1$

Pôle simple au point $z = 1+\sqrt{2}$ non entouré par C, car $|1+\sqrt{2}| > 1$.

$$\text{Res}_{z=1-\sqrt{2}} = \lim_{z\to-1+\sqrt{2}}\frac{(z-\sqrt{2}+1)}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)}$$

$$= \lim_{z\to-1+\sqrt{2}}\frac{1}{(z-\sqrt{2}-1)} = -\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $-\frac{2}{i}\oint_C \frac{dz}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)} = -\frac{2}{i}(2\pi i(-\frac{1}{2})) = 2\pi$.

Exercice VI.

Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction périodique: $f(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2. \end{cases}$

$f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}x) + \frac{1}{5}\sin(\frac{5\pi}{2}x) + \frac{1}{7}\sin(\frac{7\pi}{2}x) + \ldots\ldots.$

En déduire la somme de la série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots\ldots\ldots$

$x = 0$, $f(0) = \frac{1-(-1)}{2}$

$= 1 = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots\ldots\ldots)$

Et donc $\quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\pi}{4}$.

SERIES DE FOURIER

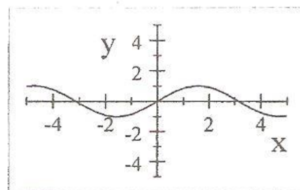
Quelques Rappels.

Définition : Une fonction $f(x)$ est dite périodique s'il existe p tel que:
pour tout $x \in D_f$ $f(x+p) = f(x)$, le plus petit p est appelé période
de la fonction f. Pour tout $n \in Z$, $f(x+np) = f(x)$.

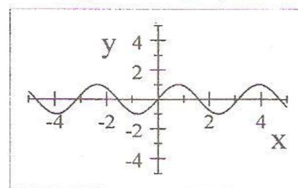
Exemples : La fonction $f(x) = cos(nx)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{n}$,
$n = 1,2.......$

La fonction $f(x) = \sin(nx)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{n}$,
$n = 1,2.......$

$y = \sin(x)$



$y = \sin(2x)$



Une fonction $f(x)$ est dite impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
Une fonction $f(x)$ est dite paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Propriétés (Rappels): 1) Pour tout $a \in R$ et f une fonction impaire intégrable :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

2) Pour tout $a \in R$ et f une fonction paire intégrable :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

3) Pour tout $n,p \in N$,

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(px)dx = 0, si\ n \neq p. \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(px)dx = \pi, si\ n = p. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(px)dx = 0, si\ n \neq p. \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(px)dx = \pi, si\ n = p \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(px)dx = 0.$$

On peut utiliser les formules suivantes / suffit d'utiliser les formules de la forme :

$$\cos(nx)\sin(px) = \frac{1}{2}[\cos((n+p)x) + \cos((n-p)x)].$$
$$\sin(nx)\sin(px) = \frac{1}{2}[\cos((n-p)x) - \cos((n+p)x)].$$

Définition : On appelle série de Fourier ou série triginométrique une série de la forme :

$$a_0 + (a_1\cos(x) + b_1\sin(x)) + \ldots + (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) + \ldots\ldots$$
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)).$$

$a_0, a_1, b_1 \ldots\ldots a_n, b_n$ des cofficients constants appelés les cofficients de Fourier.
Si la série $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge vers $f(x)$ alors $f(x+2\pi) = f(x)$, la série de fourier est périodique de période 2π.
Si la série $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge vers $f(x)$;

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)).$$

Si on peut integrer terme à terme, on obtient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n0 + b_n0) = 2\pi.$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(px)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\cos(px)dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\cos(nx)dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\sin(nx)dx).$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(px)dx = \pi a_p.$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(px)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\sin(px)dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\cos(nx)dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\sin(nx)dx).$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(px)dx = \pi b_p.$$

On peut alors les cofficients de Fourier par formules suivantes :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}$$
$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ n = 1,2,\ldots\ldots}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,\ n = 1,2,\ldots\ldots$$

On peut développer des fonctions périodiques non continues en séries de Fourier.
Par exemple, déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ -1 & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

La fonction n'est pas définie au point $x = 0$, $x = \pm\pi$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi} -dx) = \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi} -dx) = \frac{1}{2\pi}(\pi - \pi) = 0.$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} -\cos(nx)dx)$$
$$= \frac{1}{\pi}(\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi}) = 0,\ n = 1,2,\ldots..$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} -\sin(nx)dx)$$
$$= \frac{1}{\pi}(\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi}) = 0,\ n = 1,2,\ldots..$$
$$= \frac{1}{\pi}(\frac{\cos(0) - \cos(n(-\pi))}{n} - \frac{\cos(nx) - \cos(0)}{n})$$
$$= \frac{2}{\pi}(\frac{1 - \cos(n\pi)}{n}) = \frac{2}{\pi}(\frac{1 - (-1)^n}{n}).$$

Par conséquent, $b_n = 0$ si n est pair et $b_n = \frac{4}{n\pi}$ si n est impair :

$$b_1 = \frac{4}{\pi},\ b_2 = 0, b_3 = \frac{4}{3\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4}{5\pi}, \ldots.$$
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\ (\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \ldots..).$$

Si $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{\sin(3\frac{\pi}{2})}{3} + \frac{\sin(5\frac{\pi}{2})}{5} + \ldots\right) = \frac{4}{\pi}(1 + \frac{-1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots)$.

On a alors la valeur de la série numérique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = (1 + \frac{-1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots) = \frac{\pi}{4}$$

Fonction paire et impaire.

1) Si la fonction f est une fonction paire alors les fonctions $f(x)\sin(nx)$ sont impaires pour $n = 1,2,3,\ldots\ldots$, les fonctions $f(x)\cos(nx)$ sont paires pour $n = 1,2,3,\ldots\ldots$

Par conséquent, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$ et $b_n = 0$, $n = 1,2,3,\ldots\ldots$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Si la fonction f est paire et périodique de période 2π définie sur$]0,\pi[$; les coefficients de Fouriers :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ n = 1,2,\ldots\ldots}$$

$$\boxed{b_n = 0}$$

2) Si la fonction f est une fonction impaire alors les fonctions $f(x)\sin(nx)$ sont paires pour $n = 1,2,3,\ldots\ldots$, les fonctions $f(x)\cos(nx)$ sont impaires pour $n = 1,2,3,\ldots\ldots$

Par conséquent, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$ et $a_n = 0$, $n = 0,1,2,3,\ldots\ldots$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Si la fonction f est impaire et périodique de période 2π définie sur$]0,\pi[$; les coefficients de Fouriers :

$$\boxed{a_0 = 0}$$

$$\boxed{a_n = 0,\ n = 1,2,\ldots\ldots}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,\ n = 1,2,\ldots\ldots}.$$

Exemples.

Déterminer la série de Fourier de la fonction péroiodique de période 2π, $f(x) = x,\ -\pi < x < \pi$.

La fonction $f(x)$ est impaire, donc $a_n = 0$, $n = 0,1,2,\ldots.$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx,\ n = 1,2,\ldots\ldots$$

Par partie, on a :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\right),\ n = 1,2,\ldots.$$

$$b_n = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = -\frac{2}{n}(-1)^n,\ n = 1,2,\ldots.$$

$$f(x) = (2\sin(x) - \frac{2\sin(2x)}{2} + \frac{2\sin(3x)}{3} - \ldots).$$

Déterminer la série de Fourier de la fonction paire, péroiodique de période 2π, $f(x) = x,\ 0 < x < \pi$.

La fonction $f(x)$ est paire, donc $b_n = 0$, $n = 0,1,2,\ldots.$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi.$$

Par partie, on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx,\ n = 1,2,.......$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}(\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}),\ n = 1,2,.....$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}(-\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}) = \frac{2}{\pi}(\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi},\ n = 1,2,.....$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}(\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2}) = \frac{2}{\pi}(\frac{(-1)^n-1}{n^2}),\ n = 1,2,.....$$

$a_n = 0$ si n est paire, $a_n = (\frac{-4}{\pi n^2})$ si n est impair.

$$f(x) = \frac{1}{2}\pi + \frac{-4}{\pi}\ (\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25} +.....).$$

Si $x = 0$, on obtient :

$$0 = \frac{1}{2}\pi + \frac{-4}{\pi}\ (1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} +....+\frac{1}{(n+1)^2} +.......)$$

$$-\frac{1}{2}\pi = \frac{-4}{\pi}\ (1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} +....+\frac{1}{(n+1)^2} +.......).$$

$$\frac{\pi^2}{8} = (1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} +....+\frac{1}{(n+1)^2} +.......).$$

Fonctions de période 2L.

Si f est une fontion de périodique de période 2L, en utilisant le changement de variables $v = \frac{\pi x}{L}$, $\quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n\sin(\frac{n\pi}{L}x))$.

On peut alors déterminer les cofficients de Fourier par formules suivantes :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx,\ n = 1,2,.......}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx,\ n = 1,2,.......}$$

Fonction paire et impaire.

1) Si la fonction f est paire et périodique de période $2L$ définie sur$]0,L[$; les coefficients de Fouriers :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2L}\int_0^{L} f(x)dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L}\int_0^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx,\ n = 1,2,.......}$$

$$\boxed{b_n = 0}$$

Si la fonction f est impaire et périodique de période 2π définie sur$]0,\pi[$; les coefficients de Fouriers :

$$\boxed{a_0 = 0}$$

$$\boxed{a_n = 0,\ n = 1,2,.......}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L}\int_0^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx,\ n = 1,2,.......}.$$

Exemples.

Déterminer la série de Fourier de la fonction péroiodique paire
$f(x) = x^2,\ 0 < x < 1, L = 1.$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

$$a_n = \int_0^L x^2 \cos(\frac{n\pi}{1}x)dx,\ n = 1,2,\ldots\ldots$$

Intégration par partie, on obtient : $a_n = (-1)^n \dfrac{4}{n^2\pi^2}$

$$f(x) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{\pi^2}(\cos(\pi x) - \tfrac{1}{4}\cos(2\pi x) + \tfrac{1}{9}\cos(3\pi x) - \ldots;$$

Déterminer la série de Fourier de la fonction impaire, péroiodique

$$f(x) = 1,\ 0 < x < 2.$$

$a_0 = 0, a_n = 0,$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin(\frac{\pi x}{2}) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi x}{2}) + \frac{1}{5}\sin(\frac{5\pi x}{2}) + \ldots$$

En faisant un changement de variable, on obtient :

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}(c_n e^{inx}).$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,\ n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots\ldots}.$$

Identité de Parseval :

$$\boxed{2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx}$$

si $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ existe.